2022 省队选拔模拟赛题解

Flying2018

2022 年 2 月 24 日

给国的道路 (road)

【算法一】

我会暴力！直接 $O(n!)$ 枚举排列，$O(n)$ 判断合法长度。

期望得分：12 pts。

【算法二】

我会贪心！

可以发现一条边两端的劳动力之和只增不减。那么随机从能选道路中选一条，最后得到的长度就是最大的。

具体可以用反证法证明。那么每次贪心选能选的道路中最小的即可。

复杂度 $O(n^2)$。期望得分：40 pts。

【算法三】

我会做特殊图！菊花的时候直接用堆维护不能选的道路和待选的道路即可。

复杂度 $O(n \log n)$。结合算法二期望得分：52 pts。

【算法四】

我会乱搞！当 $s_i \leq 20$ 的时候，每次合并都暴力访问两个连通块所有还不能选的出边，用 set 维护待选的边。

因为每次合并至少会让权值 $+1$，故一条边最多被更新 s_i 次就一定会被弹出。

复杂度 $O(n \log n + ns_i)$。结合算法二、三期望得分：64 pts。

由于数据很水，这个算法或许能通过。(?)

【算法五】

考虑优化算法四，可以发现我们没有必要访问所有还不能选的出边。具体来说，如果边 i 还要 s_i 的劳动力，并且两段的劳动力增加都小于 $\frac{s_i}{2}$，那么边 i 一定不会被弹出。

那么用一个 set 维护连通块的所有出边，对于每条出边设置一个触发点 $\frac{s_i}{2}$。

每次合并的时候启发式合并 set 的所有出边，并且将所有到达触发点的边进行一次 check。

如果一条边被 check 但是仍然不合法，那么更新其还需要的劳动力，重新设置触发点。

可以发现，一条边只会被 check $O(\log V)$ 次。故总复杂度 $O(n \log^2 n + n \log V)$。

期望得分：100 pts。

给国与时光机 (shuttle)

【算法一】

我会暴力！暴力枚举所有情况，一一检查，复杂度 $O(\frac{(2n)!}{n!2^n})$，可以通过第一档分。

期望得分：10 pts。

【算法二】

当 $m=2$ 的时候，直接让给太祖从 1 跳到 $2n$，然后剩下的任意匹配即可。

当 $m=3$ 的时候，直接让给太祖从 1 跳到关键点再跳到 $2n$，然后剩下的任意匹配即可。

结合算法一期望得分：15 pts。

【算法三】

考虑将虫洞 i 根据左右时间段是否经过分成 N(都没有经过) L(左边经过) R(右边经过) A(都经过)。

显然 N 只能和 N 配对，L 只能和 R 配对，A 只能和 A 配对。

由于 $m \le 8$，而 N 与 N 之间任意配对不会影响答案，这样剩下的位置数只有不到 $2m$ 个，按算法一跑暴力即可。

期望得分：35 pts。

【算法四】

当 $m=2n+1$ 时，所有位置都需要被经过。稍微手模一下可以发现当 n 为偶数时可以把 $2n$ 个关键点每 4 个拆成一组，然后 1|2|1|2 这样配对。

当 n 为奇数时，用暴力跑出来确实无解。可是当 n 足够大时一定无解吗？接下来考虑证明这件事：

去掉 $(2n, 2n+1)$ 这段必然经过的时间，假设我们令 p_i 表示经历时间段 $(i-1, i)$ 后会经历的下一个时间段。一开始没有任何虫洞时是 $1 \to 2 \to 3 \cdots$，特别的令 $2n \to 1$。显然这构成一个置换。

每次在 i 和 j 后面加入一对虫洞的过程等价于交换和 p_i 和 p_j 的权值。

最后与 1 在同一个置换环中的时间会被经过，全部被经过等价于最后只有一个大环。但是交换一次会导致逆序对奇偶性改变，当 n 是奇数时意味着逆序对奇偶性会改变，所以最后一定不会构成一个大环，也就不可能全是 1。

结合算法三期望得分：45 pts。

【算法五】

当 $m = 2n$ 时，显然没有被经过的时间段两端只能用虫洞相连，然后就可以把其与左右两段时间段合成一段，用上面的方式构造即可。

结合算法四期望得分：55 pts。

【算法六】

使用算法三的配对方式,首先可以把 N 直接两两配对。最后剩下的是类似 LRLRAA...AALRAA...A 的虫洞。

若形成了 LRLR 这样形式的虫洞，容易证明内部的 RL 是无法配对的，否则它们一定会脱离主环，所以只能贪心地匹配 LR 直到只剩下一组 LR 位置。

这样保证了任意两个 LR 之间都有至少一个 A。如果剩余的 A 数量为 4 倍数，那么直接匹配 LR 然后将 A 按算法四匹配即可。

如果剩余 A 不是 4 倍数。如果此时有 LRA...ALR，可以将红色的配对，蓝色的配对，这样逆序对奇偶性恰好改变，再按上述方式构造即可。

期望得分：100 pts。

给国与赌场 (bat)

【算法一】

我会观察样例！

$a_1=0$，显然赢的概率为 0。当 $a_1=2^{-n}$ 观察样例发现答案应该就是 p^n。

感性理解先考虑 $x=\frac{1}{2}$ 的情况，显然最后总是要赢一局的，所以答案不超过 p。

对于 $x=2^{-n}$ 的情况，考虑转化成一个小目标，变成 $x=2^{-n+1}$。这样答案也就不超过 p^n。

期望得分：10 pts。

【算法二】

对于子任务三，不妨假设 $n=m$ 算出答案，然后乘 p^{n-m} 即可。

考虑此时怎么做。有一个显然的想法是：从小往大赌 2^{-n+i}，只要赢一次就到达目标了。此时只要 n 轮里面有一轮赢了即可。

感性理解也不难，如果赌小了一点，无论如何都会以那个金额再赌一次，那既然本来就要赌两次，不如一次性赌两倍。

而如果赌大了一点，赢了之后效果一样，输了之后的机会会减少，所以不如从小往大赌。

期望得分：20 pts。

【算法三】

当 x 的二进制小数表示是有限的时，感性理解应该不会赌小于最低位的钱。当成整数跑 dp。

复杂度取决于写法。

结合算法二期望得分：35∼60 pts。

【算法四】

当 x 的二进制小数表示是有限的时，结论是：每次取 x 最后一个 1 对应数赌。

不妨假设题意变成：你有 x 的钱，你要赢到 2^n。你每次赌的钱不一定要递增，但一定要是整数。

可以证明，即使赌的钱不一定要递增，上述结论仍然正确。

令 $c(s)$ 表示 s 的二进制 1 的个数，$f(x,n)$ 表示从 x 开始按上述策略赢到 2^n 的概率，$q=1-p$，那么有：

$$f(x,n)=p\cdot f(\lceil\frac{x}{2}\rceil,n-1)+q\cdot f(\lfloor\frac{x}{2}\rfloor,n-1)$$

可以通过归纳证明得到该式子等价于：

$$f(x,n)=\sum_{i=0}^{x-1}q^{c(i)}p^{n-c(i)}$$

以下默认省略 n。这样实际上要证明的就是 $\forall k>0, f(x)\geq pf(x+k)+qf(x-k)$。

化简式子：

$$p(f(x+k)-f(x))\leq q(f(x)-f(x-k))$$
$$p\sum_{i=0}^{k-1}q^{c(i+x)}p^{n-c(i+x)}\leq q\sum_{i=1}^{k}q^{c(x-i)}p^{n-c(x-i)}$$
$$\sum_{i=0}^{k-1}q^{c(i+x)}p^{n-c(i+x)+1}\leq \sum_{i=0}^{k-1}q^{c(x-i+1)+1}p^{n-c(x-i+1)}$$

我们希望能构造一个 $[x,x+k-1]\to[x-k,x-1]$ 的双射 $f(t)$，使得

$$q^{c(i)}p^{n-c(i)+1}\leq q^{c(f(i))+1}p^{n-c(f(i))}$$

即：

$$q^{c(i)-c(f(i))-1}\leq p^{c(i)-c(f(i))-1}$$

由于 $q>p$，我们只要令 $c(i)\leq c(f(i))+1$。考虑到 $\forall 2^p\leq x, c(x)\leq c(x-2^p)+1$，所以我们只需要使 $f(i)=i-2^p$ 即可，

设 $s=2^{\lceil\log_2(k)\rceil}$ 我们令 $\forall i\in[x-k+s,x+k), f(i)=i-s$。由于 $s\in[k,2k)$，我们可以令 $k'\leftarrow s-k$，递归构造。

故结论成立。

同样根据这个也可以证明，在 x 后面加任意个 0 不影响答案，所以在有限小数时依然正确。

当 $b_1=2^n$ 时，用 dp 模拟这个过程：用 $f_{i,0/1}$ 表示现在在第 i 位，后面无/有进位下赢的概率。从前往后转移即可。

复杂度 $O(n)$。

期望得分：75 pts。

【算法五】

当 x 在二进制下不是有限小数时，可以将其表示成循环小数的形式。

考虑算法四的过程，可以把一串小数表示成一个 2×2 的矩阵，容易发现这个矩阵的行列式为 $2p$，所以其无穷次方是收敛的，手动求逆或者推式子都是可以的。

复杂度 $O(b)$。

~~事实上这里要证明在模意义下收敛还需要证明一大堆东西。不过这些与 OI 没啥关系~~

期望得分：100 pts。

总结

这套题目代码量极小,思维难度不高,算法简单,不用手写任何数据结构,是~~一套不可多得的大水题~~。